# Motifs d'espaces de modules de fibrés sur une courbe

Simon Pepin Lehalleur
en collaboration avec
- Victoria Hoskins
- Lie Fu
(Radboud Universiteit Nijmegen)

Séminaire de géométrie algébrique de Jussieu
22 Octobre 2020

## Introduction

* $C$ courbe projective lisse geom. connexe de genre $g$ sur un corps $k$.

* Cet exposé porte sur la cohomologie / le motif d'espaces de modules de fibrés sur $C$, en particulier

$H^s_{n,d}$ : espace de modules de fibrés de Higgs stables de rank $n \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{Z}$.
$(\mathrm{pgcd}(n,d) = 1)$

- Un fibré de Higgs est une paire $(E,\theta)$

avec $\begin{cases} E \text{ fibré vectoriel sur } C \\ \theta : E \xrightarrow{\mathcal{O}_C} E \otimes K_C \end{cases}$

- $(E,\theta)$ est (semi-)stable si pour $\forall$ sous-fibré de Higgs $F \subsetneq E$, on a

$$\frac{\deg(F)}{\operatorname{rang}(F)} \overset{(\leq)}{<} \frac{\deg(E)}{\operatorname{rang}(F)}$$

- Motivation : $\theta \in H^0(C, \operatorname{End}(E)\otimes K_C)$

$$\text{Serre } \wr\!\wr$$

$$H^1(C, \operatorname{End}(E))^*$$

espace de modules des fibrés vectoriels stables.

$$\wr\!\wr \text{ déformations}$$

$$T_E^* \mathcal{N}_{n,d}^s$$

$\Rightarrow$ $H_{n,d}^s$ compactification partielle de $T^*\mathcal{N}_{n,d}^s$, avec un système intégrable naturel, la fibration de Hitchin. $\chi : H_{n,d}^s \longrightarrow \mathbb{A}^N$ $\left( \begin{array}{l} N = \dim \mathcal{N}_{n,d}^s \\ \quad = n^2(g-1)+1 \end{array} \right)$

* $H^s_{n,d}$ est une variété lisse et quasi-projective ;

on peut néanmoins (via DM) lui associer un motif de Chow $M(H^s_{n,d})$

tel que $H^*(M(H^s_{n,d})) \simeq H^*(H^s_{n,d})$ (Betti + MHS, $\ell$-adique + Galois ...)

Le motif $M(H^s_{n,d})$ détermine également les groupes de Chow $CH^*(H^s_{n,d})$.

$$\boxed{\text{Q: Que peut-on dire sur } M(H^s_{n,d})\,?}$$

**Thm 1: (Hoskins, –)** $(C(k) \neq \emptyset)$

Le motif $M(H^s_{n,d})$ apparaît comme facteur direct (non-explicite) de $M(C^r) = M(C)^{\otimes r}$ pour $r \gg 0$.

Cor: (Schiffmann) Pour $k = \mathbb{F}_q$, les valeurs propres de Frobenius sur $H^*_c(H^s_{n,d,\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ sont des monômes en les nombres de Weyl de $C$.

* Thm 1 exprime le fait que le motif de $H^s_{n,d}$ est construit à partir du motif de $C$.

Ce n'est pas un résultat isolé : c'est également vrai pour :

- $\mathcal{N}^s_{n,d}$ : espace de modules de fibrés vectoriels stables sur $C$. (del Baño)
- $\mathcal{N}^s_{n,L}$ ———————————— à déterminant fixé $\simeq L$ (Bülles)
- $\mathrm{Bun}_{n,d}$ : champ de modules de fibrés vectoriels sur $C$. (Hoskins, PL ; voir Thm 2)

...

(Résultats analogues pour espace de modules de fibrés sur les surfaces : Bülles, Floccari-Fu-Zhang...)

⚠ Cet heuristique a des limites :

(probablement)

$M(H^s_{n,L})$ ne satisfait pas la conclusion de Thm 1.

( lié à l'endoscopie / la symétrie miroir topologique de $SL_n$ / $PGL_n$ ; il y a des revêtements cycliques de $C$ qui contribuent au motif).

* **Thm 1 est un énoncé qualitatif. Peut-on espérer mieux ?**

Le théorème suggère de chercher une formule pour $M(H^s_{n,d})$ en termes de $M(C)$, ou de motifs d'objets géométriques apparentés:

$(M(C) = M_0(C) \oplus M_1(C) \oplus M_2(C))$

- Jacobienne : $M(\mathrm{Jac}) \simeq \bigoplus_{i=0}^{2g} \mathrm{Sym}^i M_1(C)$

- Puissances symétriques : $M(C^{(i)}) \simeq \mathrm{Sym}^i M(C)$.

* Pour $n$ quelconque, cela apparaît hors de portée.

- Les nombres de Betti de $H^s_{n,d}$ sont connus à travers des formules compliquées.

  (Hausel-Rodriguez-Villegas, Mozgovoy, Schiffmann, Mellit...)

  Les nombres de Hodge ne sont pas connus (?)

  (conjecture de Hausel-Rodriguez-Villegas).

- Plus simplement, nous ne savons pas calculer $M(\mathcal{N}^s_{n,d})$ ! (nombres de Hodge connus par Earl-Kirwan and Zagier)

* Pour se consoler, quelques formules :

**Thm 2: (Hoskins-PL):** $C(k) \neq \emptyset$, $(n,d)$ quelconque.

Le motif $M(\mathrm{Bun}_{n,d}) \in DM(k,\mathbb{Q})$ est donné par :

$$M(\mathrm{Bun}_{n,d}) \simeq M(\mathrm{Jac}\, C) \otimes M(B\mathbb{G}_m) \otimes \bigotimes_{i=1}^{n-1} Z(C, \mathbb{Q}\{i\})$$

avec $M(B\mathbb{G}_m) \simeq \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Q}\{i\} \;\left(\simeq M(\mathbb{P}^\infty)\right)$

$$Z(C,x) := \bigoplus_{j\geq 0} M(C^{(j)})\, x^j \quad \text{(fonction zêta motivique)}$$

* Version motivique de résutats de
  - Atiyah-Bott (Betti)
  - Teleman (MHS)
  - Arapura-Dhillon (André-Nori)
  - Gaitsgory-Lurie ($\ell$-adique)

plus généralement pour $\mathrm{Bun}_G$.

* En rang 2 :

**Thm 3 : (Fu-Hoskins-PL) :** $\mathrm{pgcd}(n,d)=1$

(a) $M(\mathcal{N}^s_{n,d}) \simeq M(\mathrm{Jac}(C)) \otimes M(\mathcal{N}^s_{n,L})$

et $M(\mathcal{N}^s_{2,L}) \simeq M(C^{(g-1)})\{g-1\} \oplus \bigoplus_{i=0}^{g-2} M(C^{(i)}) \otimes \left(\mathbb{Q}\{i\} \oplus \mathbb{Q}\{3g-3-2i\}\right)$

(b) $M(H^s_{2,d}) \simeq M(\mathcal{N}^s_{2,d}) \oplus \bigoplus_{j=1}^{g-1} M(\mathrm{Jac}\, C) \otimes M(C^{(2j-1)})\{3g-2-2j\}$

(c) Soient $(P_1,\dots,P_N) \in C(k)^N$ et $(\alpha_1,\dots,\alpha_N) \in \mathbb{R}^N$.

Soit $N^{\alpha\text{-}s}_{2,d}$ (resp. $H^{\alpha\text{-}s}_{2,d}$) espace de modules de fibrés vectoriels (resp. de Higgs) paraboliques

$\alpha$ - stables. Alors

- $$M(\mathcal{N}^{\alpha-s}_{2,d}) \simeq M(\mathcal{N}^{s}_{2,d}) \otimes M(\mathbb{P}^1)^{\otimes N} \oplus \bigoplus_{j=0}^{N-3} M(\operatorname{Jac} C)^{\otimes 2}\{g+j\}^{\oplus b_j(\alpha)}$$

avec $b_j(\alpha)$ explicite.

- $M(H^{\alpha-s}_{2,d})$ est indépendant de $\alpha$ ; formule accessible, calcul en cours.

## Motifs de Voevodsky

* Qu'est-ce qu'un invariant cohomologique ?

Approche naïve :

cohomologique

on se limite aux invariants « linéaires »

$$F : \mathrm{Sch}_k^{op} \longrightarrow \mathrm{Cpl}(\mathbb{Z})$$

Cette notion est bien trop générale pour être utile.

* Idée directrice de Voevodsky : il suffit d'imposer des axiomes bien choisis « à la Eilenberg-Steenrod » pour obtenir une bonne théorie de catégories triangulées de motifs mixtes.

**def :** (char $k = 0$)

Un motif effectif (de Voevodsky, à coefficients rationnels) est un foncteur

$$F : Sm_k^{op} \longrightarrow Cpl(\mathbb{Q})$$

avec les deux propriétés suivantes :

- (descente étale) : pour tout recouvrement étale $\mathcal{U} \longrightarrow X$, on a

$$F(X) \xrightarrow[q-iso]{\sim} \mathrm{Tot}^{\Pi} F(\check{C}_\bullet(\mathcal{U}/X))$$

$$\left( \check{C}_n(\mathcal{U}/X) = \overbrace{\mathcal{U} \times_X \cdots \times_X \mathcal{U}}^{n+1} \right)$$

(ou encore : $\forall X \in Sm_k$, $F(X) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{ét}(X,F)$)

Ex : $X = U \cup V$, avec $U, V$ ouverts Zariski

La descente étale dans ce cas donne un $\Delta$ :

$$F(X) \longrightarrow F(U) \oplus F(V) \longrightarrow F(U \cap V) \xrightarrow{+}$$

et une suite exacte longue de Mayer-Vietoris :

$$\cdots \to H^i F(X) \to H^i F(U) \oplus H^i F(V) \to H^i F(U \cap V) \to H^{i+1} F(X) \to \cdots$$

(invariance par homotopie) : pour tout $X \in Sm_k$,

on a $F(X) \underset{q\text{-iso}}{\xrightarrow{\sim}} F(X \times \mathbb{A}^1)$.

---

* La sous-catégorie $DM^{eff}(k, \mathbb{Q})$ de $D(PSh(Sm_k, \mathbb{Q}))$ formée par les motifs est triangulée.

L'inclusion $DM^{eff}(k, \mathbb{Q}) \hookrightarrow D(PSh(Sm_k, \mathbb{Q}))$

a un adjoint à gauche, le foncteur de

localisation motivique :

$$L_{mot} : D(PSh(Sm_k, \mathbb{Q})) \longrightarrow DM^{eff}(k, \mathbb{Q})$$

* Le motif de $X \in Sm_k$ est par définition

$$M(X) := L_{mot}\left( Y \longmapsto Hom(Y, X) \otimes \mathbb{Q}[0] \right)$$

* Par construction, on a :

- descente étale pour $M(-)$ : $\mathcal{U} \xrightarrow{ét} X$

$$M(X) \simeq \underset{\Delta^{op}}{\mathrm{Hocolim}}\, M(\check{C}^{\cdot}(\mathcal{U}/X)).$$

- invariance par homotopie :

$$M(X \times \mathbb{A}^1) \simeq M(X).$$

* Le produit tensoriel de $D(PSh(Sm_k, \mathbb{Q}))$

induit une structure symétrique monoidale sur $DM^{eff}(k, \mathbb{Q})$ $\left( F \otimes G := L_{mot}(F \underset{PSh}{\otimes} G) \right)$.

et l'on a

- $M(X \times Y) \simeq M(X) \otimes M(Y)$ "formule de Künneth"

- $\mathbb{Q}\{0\} := M(\operatorname{Spec} k)$ objet unité.

* En utilisant $\mathbb{P}^1 \underset{p}{\overset{\infty}{\rightleftarrows}} \operatorname{Spec} k$, on obtient

$$M(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Q}\{0\} \oplus \underbrace{\tilde{M}(\mathbb{P}^1)}_{\substack{=: \\ \mathbb{Q}\{1\} \\ \simeq\, \mathbb{Q}(1)[2]}}$$

$\mathbb{Q}\{1\}$ twist de Tate.

"**def:**" La catégorie triangulée tensorielle $DM(k, \mathbb{Q})$ des motifs de Voevodsky est obtenue à partir de $\left( DM^{eff}(k, \mathbb{Q}), \otimes \right)$ en inversant formellement $\mathbb{Q}\{1\}$.

$\mathbb{Q}\{-1\}$

(la définition précise utilise la notion de spectre, utilisée par les topologues pour construire la catégorie homotopique stable.)

* On a en particulier des twists de Tate $\mathbb{Q}\{n\}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ : $\mathbb{Q}\{n\} := \mathbb{Q}\{1\}^{\otimes n}$.

<u>Notat°</u>: $M\{n\} := M \otimes \mathbb{Q}\{n\}$.

* Les théories cohomologiques de Weil mixtes : Betti, $\ell$-adique, de Rham ... satisfont la descente étale, l'invariance par homotopie, et $\tilde{H}^*(\mathbb{P}^1)$ est de dimension 1 ($\Rightarrow$ inversible / $\otimes$).

$\rightsquigarrow$ Foncteurs de réalisation.

<u>Ex :</u> (réalisation de Betti) $k = \mathbb{C}$ (ou $k \hookrightarrow \mathbb{C}$)

$$R_B : DM(\mathbb{C}, \mathbb{Q}) \longrightarrow D(\mathbb{Q})$$

foncteur exact monoidal avec, pour $X \in Sm_{\mathbb{C}}$,

$$H^*\left(R_B(M(X))^\vee\right) \simeq H^*_{sing}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}).$$

On a également une version plus précise :

$$R_{Hdg} : DM(\mathbb{C}, \mathbb{Q}) \longrightarrow D(\mathrm{Ind}(MHS_{\mathbb{Q}}))$$

qui calcule la structure de Hodge mixte sur $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$.

* Par descente étale pour $M(-)$, il est relativement formel d'étendre $M(-)$ aux champs algébriques.

Si $\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{X}$ est un atlas (lisse, surjectif représentable, avec $\mathcal{U}$ un schéma), on définit

$$M(\mathcal{X}) := \operatorname*{Hocolim}_{\Delta^{op}} M(\check{C}^\cdot(\mathcal{U}/\mathcal{X}))$$

et c'est indépendant du choix de $\mathcal{U}$.

* Si $\mathcal{X} = [X/G]$ est un champ quotient avec

$X/_k$ quasiprojectif et lisse et $G$ affine, on a

$$M([X/G]) = \operatorname{Hocolim}_{n\in\mathbb{N}} M\left(\frac{X\times V_n^\circ}{G}\right)$$

lieu libre de $G \circlearrowright V_n$

(Totaro, Edidin-Graham) $\left(G \hookrightarrow GL(V),\ V_n = V^{\oplus n}\right)$

Ex : $$M(BG_m) \simeq \operatorname{Hocolim}_{n\in\mathbb{N}} M\left(\frac{\mathbb{A}^n \setminus \{0\}}{G_m}\right)$$

$$\simeq M(\mathbb{P}^\infty)$$

$$\simeq \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Q}\{i\}.$$

## Propriétés de $DM(k,\mathbb{Q})$ : (Voevodsky + ...)

* Formule du fibré projectif : $E \longrightarrow X$ rang $r$

$$M(\mathbb{P}(E)) \simeq \bigoplus_{i=0}^{r-1} M(X)\{i\}$$

* Triangle de Gysin : $Z \hookrightarrow X$ codim $c$

$$M(X\setminus Z) \longrightarrow M(X) \longrightarrow M(Z)\{c\} \xrightarrow{+}$$

* Dualité de Poincaré : $X \in SmProj_k$ de dim $d$.

$$M(X)^\vee \simeq M(X)\{-d\}$$

voici pourquoi on inverse $\mathbb{Q}\{1\}$.

* Simplification :

$$DM^{eff}(k,\mathbb{Q}) \underset{p.f.}{\hookrightarrow} DM(k,\mathbb{Q})$$

* Lien avec les cycles algébriques :

$$\mathrm{Hom}_{DM(k,\mathbb{Q})}\left(M(X), \mathbb{Q}\{n\}\right) \simeq CH^n(X)\otimes\mathbb{Q}$$

$$\rightsquigarrow \quad CHM(k,\mathbb{Q}) \overset{p.f.}{\hookrightarrow} DM(k,\mathbb{Q})$$

$$h(X) \longmapsto M(X).$$

## Pourquoi étudier DM ?

- Invariant cohomologique universel pour des axiomes très naturels (théorie homotopique des schémas)

- Lien surprenant avec les cycles algébriques.

- Espoir (lointain !) de réaliser le programme initial de Grothendieck pour les motifs mixtes :

<u>conj</u> : Il existe une $t$-structure sur $DM(k, \mathbb{Q})$, et en particulier une catégorie abélienne

$$MM(k, \mathbb{Q}) \subseteq DM(k, \mathbb{Q})$$

telle que les foncteurs de réalisation sont $t$-exacts.

$\Rightarrow$ Conjectures standard (char 0), Bloch-Beilinson-Murre, Beilinson-Soulé.

## Motifs abéliens :

<u>def</u> : $DM_{ab}(k, \mathbb{Q}) := \langle M(C) \mid C \text{ courbe lisse} \rangle^{\otimes}$

$\cup$

( facteurs directs de

$$CHM_{ab}(k,\mathbb{Q}) := \left\{ \quad M(C_1^{k_1} \times \cdots \times C_n^{k_n}) \quad \right\}$$

**cor. du Thm 1 :** $M(H^s_{n,d}) \in CHM_{ab}(k,\mathbb{Q})$.

(et donc de résultats comme le thm 1)

L'intérêt de cette notion est que certaines conjectures totalement ouvertes sur DM sont connues pour $DM_{ab}$.

**Thm :** (a) (Kimura) Les motifs dans $CHM_{ab}$ sont de dimension finie ; en particulier

$$M, N, P \in CHM_{ab}(k,\mathbb{Q}),$$

$$M \oplus P \simeq N \oplus P \Rightarrow M \simeq N.$$

(b) (Wildeshaus, Ancona) Si $k$ est de car. 0 (resp. un corps fini), alors

$$R_\ell : DM_{ab}(k,\mathbb{Q}) \longrightarrow D(\mathbb{Q}_\ell) \quad (\text{resp.}$$

$$\left\{ R_\ell : DM_{ab}(k,\mathbb{Q}) \longrightarrow D(\mathbb{Q}_\ell) \right\}_{\text{pr.}\,\ell}\Big)$$ est

conservatif.

# Preuve du Théorème 1 :

- Action de Hitchin $\mathbb{G}_m \circlearrowright H^s_{n,d}$ :

$$t\cdot(E,\theta) = (E, t\theta).$$

Cette action est semi-projective :

- $\lim\limits_{t\to 0} t\cdot(E,\theta)$ existe.
- $(H^s_{n,d})^{\mathbb{G}_m} \subseteq \chi^{-1}(0)$ est projective.

(Karpenko, Brosnan)

- Décomposition motivique de Białynicki-Birula :

$$M(H^s_{n,d}) \simeq \bigoplus M(\underbrace{Ch^{\alpha_n - s}_{\underline{n}', \underline{d}'}}) \{c_{\underline{n}', \underline{d}'}\}$$

avec $Ch^{\alpha_n - s}_{\underline{n}', \underline{d}'}$ espace de modules de chaînes stables de fibrés vectoriels :

$$F_0 \xrightarrow{\gamma} F_1 \to \cdots \to F_r$$

- La stabilité dépend de $\alpha \in \mathbb{R}^{r+1}$.

. "Wall-crossing" (Garcia-Prada, Heinloth, Schmitt):

Stratifications de Harder-Narasihman pour les champs de chaînes + récurrence sur $(\underline{n}, \underline{d})$ $\rightsquigarrow$ on se réduit à montrer que $M(Ch^{inj}_{m,\underline{d}}) \in \langle\langle M(C) \rangle\rangle^{\otimes}$ avec

$$Ch^{inj}_{m,\underline{d}} = \left\{ E_0 \hookrightarrow E_1 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow E_r \;\middle|\; \begin{array}{l} \operatorname{rang} E_i = m \\ \deg E_i = d_i \end{array} \right\}$$

. Le morphisme
$$\begin{aligned} Ch^{inj}_{m,\underline{d}} &\longrightarrow Bun_{m,d_r} \\ (E_i) &\longmapsto E_r \end{aligned}$$

est un champ de « modifications de Hecke successives » :
$$Ch^{inj}_{m,\underline{d}} = Hecke^{(d_1-d_0)}(Ch_{m,\hat{\underline{d}}}) = \cdots$$

En adaptant des idées de Laumon et Heinloth, on obtient une formule :

$$M\left(\mathrm{Ch}^{inj}_{m,\underline{d}}\right) = M(\mathrm{Bun}_{m,d_r}) \otimes \bigotimes_{i=1}^{r} M\left(\mathrm{Sym}^{d_i-d_{i-1}}(C\times\mathbb{P}^{m-1})\right)$$

et on conclut avec Thm 2. $\square$

## Preuve du Thm 3 :

- On commence par montrer que

$$M(\mathcal{N}^s_{n,d}),\ M(\mathcal{N}^s_{n,L}) \text{ sont dans } \langle M(C)\rangle^{\otimes}$$

en adaptant un argument de Beauville-Bülles.

- On montre que

$$M(\mathcal{N}^s_{n,d}) \simeq M(\mathcal{N}^s_{n,L}) \otimes \mathrm{Jac}(C)$$

en utilisant le résultat analogue de Harder-Narasihman en cohomologie ℓ-adique et la conservativité de la réalisation ℓ-adique pr les motifs abeliens. (del Baño)

- On calcule $M(\mathcal{N}^s_{2,L})$ en utilisant la géométrie birationelle des espaces de modules de paires :

$$P^{\sigma\in\mathbb{R}}_{2,L} = \left\{ (E,s) \;\middle|\; \begin{array}{l} \cdot\ \det E \simeq L \\ \cdot\ E \text{ fibré vect. de rang } 2 \\ \cdot\ s \in H^0(C,E) \\ \cdot\ \sigma\text{-semistables} \end{array} \right\}$$

étudiée par Thaddeus :

$$\begin{tikzcd}
P^{\sigma_0}_{2,L} \arrow[r, dashed, "\text{flip standard}"] \arrow[d, "s"] & P^{\sigma_1}_{2,L} \arrow[r, dashed] & \cdots \arrow[r, dashed] & P^{\sigma_\ell}_{2,L} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{P}^{d+g-2} & & & \boxed{N_{2,L}}
\end{tikzcd}$$

action sur les motifs due à Jiang.

et le résultat de simplification de Kimura.

. Le cas des fibrés paraboliques utilise également la variation de $\alpha$ et des flips standards.

. Le cas des fibrés de Higgs paraboliques repose sur un résultat d'invariance du motif pour les flops de Mukai. $\square$

MERCI!